

小中学校理科「電気による発熱」に関する基礎研究

— 定量的理解度向上のための数式の活用 —

重松 宏武

A Fundamental Study for Science “Heat Rise Caused by Electricity”
in Elementary and Junior High Schools
: Utilization of mathematical presentation for increasing
the depth of quantitative understanding

SHIGEMATSU Hirotake

(Received September 30, 2011)

はじめに

平成20年3月の学習指導要領の改訂（小学校は平成23年度、中学校は平成24年度から、それぞれ完全実施）により、小学校第6学年に「電気の利用」の単元が追加された¹⁾。この単元においては手回し発電機を用いた発電、コンデンサーを用いた蓄電、電気の光・音・熱などへの変換、電気の利用などについて学習し、これらは中学校で学ぶ「電流、電圧、抵抗、エネルギー、電磁誘導」等の基礎になる内容となる。同時に、近年、注目されているエネルギー環境教育の基礎になる内容でもある。一般論として、小中高等学校理科はその学習内容の多くが校種をまたいだ反復学習となっている。この校種や学年が上がるに従って行われる反復によって学習内容の理解が定性的なものから定量的なものへと発展していくのである。しかし、その発展が必ずしもうまくいっているものばかりとは言い切れない。単元によっては弱い継続性のために、児童・生徒の理解に対する混乱を招いている例も少なくない。本論文においては、そのような例の1つとして、先で述べた単元「電気の利用」の中でも「電気による発熱」に関する学習に注目し、隠れている問題点を挙げ、理解を向上するために定性的な事象を数式を用いた定量的な展開をすることによって、その本質を理解するための基礎研究に関する成果を報告する。なお、本論文は小・中学校理科の教員または教員を目指す大学生を対象にした内容であり、先で述べた「児童・生徒の理解に関する混乱」を避けるために指導者として最低限、理解して欲しい内容である。そのため、高度な数式は用いず、高校物理の知識で理解できる範囲の表現にとどまることをお許し頂きたい。

1. 「電気による発熱」実験の現状と問題点

小学校第6学年における「電気による発熱」では、電気は熱に変えて使うことができるというエネルギー変換と電熱線の太さによって発熱量が変わるということを学ぶ²⁻⁴⁾。具体的には電圧一定下においては、太い電熱線の方がよく発熱することを発泡ポリスチレン片を溶かす時間や温度計による温度変化から理解する。その際に用いる回路の外観図を図1に示す。さらに、

表 1 に小学校教科書各社に記述している電熱線の太さと発熱量を比べる実験に関する情報を記す。ここで、電力供給源とは図 1 の乾電池に相当するものを意味し、各社ともに乾電池、充電電池または電源装置（直流定電圧電源）の使用を提案している。長さ及び直径は用いる電熱線 2 種類の情報を意味し、同一電力供給源を用いた回路における電熱線と発熱の違いを表 1 内「発熱量の比較の仕方」に対応して、実験を行う。

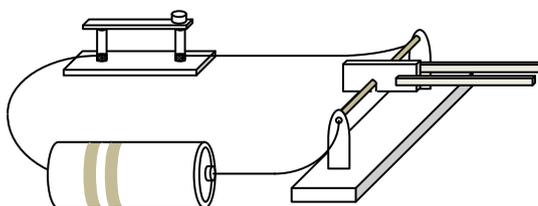


図 1. 「電気による発熱」実験の外観図。抵抗の太さの差と発熱量の違いの関係を調べるために割り箸で挟んだ発泡ポリスチレン片を溶かしている様子である。

表 1. 各社教科書内に記述している電熱線の太さと発熱量を比べる実験に関する情報

		東京書籍	学校図書	啓林館	大日本図書
使用する電力供給源	電池	乾電池または充電電池 1 個 電熱線（長さ 50 mm、直径 0.2 mm と 0.3 mm）	乾電池または充電電池 2 個 電熱線（長さ 100 mm、直径 0.2 mm と 0.4 mm）	（記述無し）	乾電池 2 個 電熱線（長さ 250 mm、直径 0.2 mm と 0.4 mm）
	電源装置	乾電池 1 個相当 電熱線（長さ 80 mm、直径 0.2 mm と 0.3 mm）	乾電池 2 個相当 電熱線（長さ 100 mm、直径 0.2 mm と 0.4 mm）	乾電池 2 個相当 電熱線（長さ 100 mm、直径 0.2 mm と 0.4 mm）	乾電池 2 個相当 電熱線（長さ 250 mm、直径 0.2 mm と 0.4 mm）
発熱量の比較の仕方		○発泡ポリスチレン片またはろうそく片を溶かす時間	○みつろう粘土またはろうそく片を溶かす時間 ○デジタル温度計を用いて温度変化	○発泡ポリスチレン片またはろうそく片を溶かす時間	○液晶温度計で温度変化を読み取る

ここで示した「電気による発熱」実験において、指導者としてまず第一に知らないといけないことが電熱線の抵抗に関する関係式である。高校物理において定番とも言える関係式であり、『均質な導体の抵抗値 R は導体の長さ l に比例し、断面積 S に反比例している。その比例定数を ρ とすると

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1)$$

となる。 ρ は導体の長さ 1 m、断面積 1 m² 当たりの抵抗値であり、これを抵抗率という。』と

定義されている。ちなみに、小学校の教育現場で用いる電熱線とはニクロム線のことを指し、抵抗率は室温でおよそ $108 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ の値を持ち、表 1 に掲載している長さ 50 mm 直径 0.2 mm のものは約 1.7 Ω 、長さ 50 mm 直径 0.3 mm のものは約 0.76 Ω 、最大の値を持つものとして長さ 250 mm 直径 0.2 mm のものでも約 8.6 Ω の大きさを持つ。なお、厳密には抵抗率の値は温度に依存するが（気温の変化に伴う値の変化、もしくは発熱に伴う値の変化）、電熱線（ニクロム線）におけるその変化量は小さく、本論文内で議論する物理量への影響は限りなく考慮する必要が無いと考え、抵抗率は温度変化しない一定の値として取扱う⁵⁾。

この(1)式で表される電気抵抗と電圧一定の電力供給源の回路を考えると、電熱線が太い方が多くの発熱を行うことは自明の事実である。しかし、ここで問題は2つ隠れていると考える。

問題①. 指導者が定性的な結果のみを知識として知っているのでは無く、発熱量の差（または比）をきちんと定量的に理解しているかどうか。

問題②. 乾電池を用いた場合、予想に反して電熱線が細い方が発熱量が多い場合がある。この原因と対策をきちんと理解しているかどうか。

実は問題①に関しては今回の場合、本論文全ての内容を指している。本論文の内容を理解していると、表1において、東京書籍が乾電池1個に対して、学校図書が乾電池2個と変えている分、電熱線も前者は長さ 50 mm、後者 100 mm となっていることの原因や、東京書籍において電源装置を用いる場合は長さを 80 mm に変える理由もすることもおのずと理解できるはずである。一方、問題②は問題①の一部ではあるが、小学校第 6 学年の指導現場で実際起こりうることのため、ここではあえて挙げた。この問題の原因は用いた電熱線の抵抗値が小さいために、直列つなぎとなっている電池の内部抵抗や回路の接触抵抗などを無視することができない状況になっているにも関わらず、無視していることが原因である。この解決法に関しては電池の代わりに電源装置を用いるか、電熱線を同時に並列回路にして実験を行えば、問題は解決できる（4章参照）。なお、ここで『充電機の場合は？』という疑問が生じると思う。充電機には乾電池より若干小さいとは言われているが内部抵抗は存在している。使用すると乾電池同様に電圧は下がり、内部抵抗は上昇する。逆に充電すると電圧は上がり、内部抵抗は減少する。さらに沢山繰り返して充放電を行うと内部抵抗は高くなると言われていることから、内部抵抗に関しては乾電池の場合と同じであると考えたらよい。

では、中学校での学習を見ると、例えば「電力（W 数）と発熱量の関係：W 数の大きい方が熱を発生させる働きが大きい（東京書籍、啓林館）」と説明されている。具体的には内部抵抗を考えなくて良い電源装置を用いて、抵抗の異なる電熱線に同じ電圧をかけることによって電力差をつくり、「同じ電源につないだ場合（電圧一定）、太い電熱線の方が細い電熱線より多く発熱する」ということを小学校の反復として行っているのである。一方でこれは『電流一定で電力を変えた場合、細い電熱線の方が太い電熱線より多く発熱する』という事実も生むこととなる。また、中学校で用いる発熱体は太さではなく、長さで抵抗の違いを表しており、抵抗は長さで比例するという(1)式の基礎を定量的に指導できる良い機会となるはずであるが、残念ながら、授業内ではほぼ説明無しで進められているのが現状である。このように中学校での切り口が小学校での切り口と異なっているが、結果として断片的な知識を与えるにすぎず、きちんとした理解にまでたどり着いていない状況である。

以上のことを踏まえて、段階的にさまざまなモデルを提案しながら、小中学校理科「電気による発熱」に関して定量的理解度を向上するために役に立つ数式の活用例を紹介する。なお、2～5章で述べる個々のモデルの違いをわかりやすくするために、以下にモデルの関係を簡潔に

まとめる。

(1) モデル I『小学校理科 電圧一定モデル（内部抵抗や接触抵抗等を考えない）』

通常、小中学校の教育現場で用いられている回路モデルであり、乾電池が供給する電圧 V 、電熱線の抵抗 R 、そして回路に流れる電流 I のみを考えた理想モデルである（2章）。

(2) モデル II『小学校理科 電圧一定モデル（内部抵抗や接触抵抗等を考える）』

モデル I に従うと電熱線が太いと多く発熱するはずであるが、そうならない場合があると、教育現場から声が挙がっている。この原因を説明するためのモデルで、電池の内部抵抗や回路の接触抵抗なども考慮した構成となっている（3章。問題②の原因に言及）。

(3) モデル III『小学校理科 電圧一定モデル（並列モデル）』

モデル II での不都合は個別に回路を組むと電池の内部抵抗や回路の接触抵抗などの影響のために太い電熱線と細い電熱線にかかる電圧が異なってしまうことにある。それは電力供給源として電源装置を用いることによって改善はされる。しかし、取扱いのしやすい乾電池をあえて用いる場合を想定したモデルである。具体的には電熱線を並列に組み、かかる電圧を同じにしている（4章）。

(4) モデル IV『中学校理科 電流一定モデル（接触抵抗等を考える）』

中学校においては電力と発熱量の相関を学習するが、第一に、電力の違いを電圧一定で抵抗を変えることによって表現している。しかし、これは電源装置を用いたモデル I（またはモデル II）に相当し、内容が重複するため、ここでは採用しない。代わって、電力の違いによる発熱の違いを学ぶ方法として電流一定モデルを示す。なお、あえて、接触抵抗等を考えることとしたが、電流一定モデルでは電熱線の発熱量に影響を与えることは無い。その点の理解もできるモデルである（5章）。

2. モデル I 『小学校理科 電圧一定モデル（内部抵抗や接触抵抗等を考えない）』

小中学校の教育現場で用いられている乾電池が供給する電圧 V 、電熱線の抵抗 R 、そして回路に流れる電流 I のみを考えた理想モデルについて数式を用いて、それぞれの物理量を表していく。考える回路を図 2 に示す。ここで電池の電圧、電熱線の抵抗率、その長さはそれぞれ V_1 、 ρ 、 l で表される同じ値のものにより構成され、半径は r 、 r' ($r < r'$) と異なるものを採用する。それによって、それぞれに流れる電流も I_1 、 I_1' と異なることとなる。表 2 に電熱線に関する物理量（抵抗 R 及び R' 、電圧 V_1 （同一）、電流 I_1 及び I_1' 、電力 P_1 及び P_1' 、電力量 W_1 及び W_1' ）について求められた数式を示す。なお、これらは抵抗の関係式（(1)式）を受け入れることができれば、中学校理科で学習する基礎知識で導くことができる数式である。

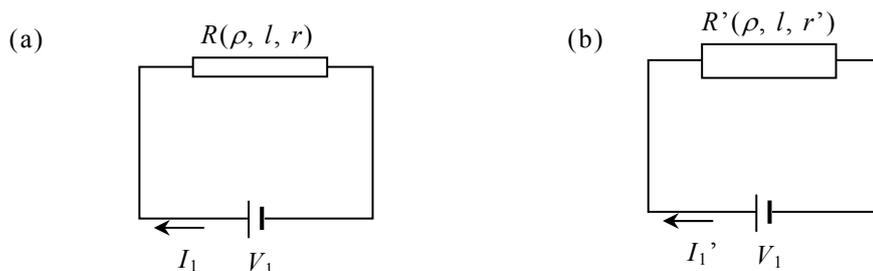


図 2. モデル I（電圧一定モデル（内部抵抗や接触抵抗等を考えない））の回路図

表 2. モデル I における電熱線に関する物理量

物理量	モデル I (半径 r) (図 2(a))	大小関係	モデル I (半径 r') (図 2(b))
抵抗	$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$	$>$	$R' = \rho \frac{l}{S'} = \frac{\rho l}{\pi r'^2}$
電圧	$V_1 = RI_1 = \frac{\rho l I_1}{\pi r^2}$	$=$	$V_1 = R' I'_1 = \frac{\rho l I'_1}{\pi r'^2}$
電流	$I_1 = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1 \pi r^2}{\rho l}$	$<$	$I'_1 = \frac{V_1}{R'} = \frac{V_1 \pi r'^2}{\rho l}$
電力	$P_1 = V_1 I_1 = \frac{V_1^2 \pi r^2}{\rho l} = \frac{\rho l I_1^2}{\pi r^2}$	$<$	$P'_1 = V_1 I'_1 = \frac{V_1^2 \pi r'^2}{\rho l} = \frac{\rho l I_1'^2}{\pi r'^2}$
電力量	$W_1 = P_1 t = \frac{V_1^2 \pi r^2 t}{\rho l} = \frac{\rho l I_1^2 t}{\pi r^2}$	$<$	$W'_1 = P'_1 t = \frac{V_1^2 \pi r'^2 t}{\rho l} = \frac{\rho l I_1'^2 t}{\pi r'^2}$

表 2 から、それぞれの回路の電力量として比を求めると、

$$W'_1 = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 W_1 \quad (2)$$

という結果を得、電力量から熱量へのエネルギー変換効率 100%と仮定すると、(2)式は電熱線の半径が元の n 倍になると発熱量は元の n^2 倍になることを意味する。この関係は例えば、電熱線を水の入ったビーカーに投げ込み、発生した熱量による水の温度変化を調べる場合には水に与えた熱量の差は(2)式を用いれば良いが、発泡ポリスチレンを溶かす場合には電熱線との接触面積も重要な要因となる。図 3 に示すように例えば、半径 r 、長さ l の電熱線の場合、発泡ポリスチレンの電熱線に平行方向の厚さ L とすると断面積 $s (= \pi r L, L < l)$ が接しており、単位面積・単位時間当たりの電力量 (ΔW_1 と $\Delta W'_1$) を比較検討しなくてはならない(発熱線は反面しか接していない(図 3 の斜線部))。なお、溶かし始めと溶かし終わりの部分では発泡ポリスチレンに接する断面積の変化(増減)はあるが、その増減の値は相殺されることより、平均して s とおいて矛盾は無い。

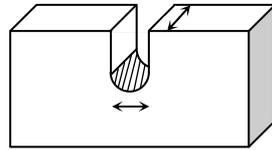


図 3. 発泡ポリスチレンの発熱線による溶け方

ゆえに ΔW_1 及び $\Delta W'_1$ はそれぞれ、

$$\Delta W_1 = \frac{\frac{1}{2} P_1 t \times \frac{L}{l}}{st} = \frac{V_1^2 r}{2 \rho l^2}, \quad \Delta W'_1 = \frac{\frac{1}{2} P'_1 t \times \frac{L}{l}}{s't} = \frac{V_1^2 r'}{2 \rho l^2} \quad (3)$$

と表され、これらの関係は

$$\Delta W_1' = \left(\frac{r'}{r} \right) \Delta W_1 \quad (4)$$

となる。(3)式において新たな変数として $s' = \pi r' L$ を採用した。ここで確認したいことは、 ΔW_1 及び $\Delta W_1'$ には発泡ポリスチレンの厚さ L には依存しないことである (モデル II~IV も同様)。つまり、理想論としては発泡ポリスチレンの厚さ L に依存せず、同じ電熱線を用いた場合に溶けるスピードは同じということを意味している。結論として、モデル I においては単純に電熱線が発する熱量 (電力量) は電熱線の半径の 2 乗に比例し (表 2)、発泡ポリスチレンの単位面積・単位時間当りに与える電熱線の熱量 (電力量) は電熱線の半径に比例する ((3)式) という結果を得た。この結果は「電圧が一定ならば、太い電熱線の方が発熱量が大きく、早く発泡ポリスチレンを溶かす」という指導者側の意図に沿ったものとなる。これは小学校教員が基本的に理解している内容に相当する。

3. モデル II 『小学校理科 電圧一定モデル (内部抵抗や接触抵抗等を考える)』

「電圧一定下においては、太い電熱線の方がよく発熱する」ということは 2 章で述べたことから証明されている。しかし、現実論としてこの関係がうまく導けないことがあると教育現場の声として聴く^{3,4)}。これは現実的な回路として「電池の内部抵抗」や「接続部の接触抵抗」などを考慮していないためである。そのため、電熱線の細い方が早く発泡ポリスチレンが溶ける場合が生じる。本来ならば、電熱線の抵抗が考慮すべき抵抗より、はるかに大きければ問題はないのだが、数十 mm の電熱線では抵抗がせいぜい数 Ω 程度という小さい値のために考慮しないとイケない。なぜならば、一般的に乾電池では 0.1~0.5 Ω 程度の内部抵抗をもち、接触抵抗も同程度、リード線の抵抗は $1 \times 10^{-2} \sim 1 \times 10^{-1} \Omega$ 程度あると言われている。合計すると電熱線の抵抗に比べて決して小さい値ではない。さらに内部抵抗に限っては電池の消耗に従って大きくなっていくため、電池の消耗に関しても気を配る必要がある。本章では数式の複雑化を避けるために、考えるべき「その他の抵抗」として「電池の内部抵抗」、「接続部の接触抵抗」、「リード線の抵抗」の 3 つに限定し、これらは直列につながれていることからまとめて 1 つとして考えて良いことを 3-1 節で示し、この結果を踏まえて 2 章同様にさまざまな物理量を数式を用いて 3-2 節にて展開する。

3-1. 「電池の内部抵抗」、「接続部の接触抵抗」及び「リード線の抵抗」について

ここではモデル I においては無視していたさまざまな抵抗を考慮したモデルを考える。具体的には起電力 E の電池に対して、抵抗 R 、電流 I_2 、電池の内部抵抗 r_0 、リード線の接触抵抗 R_C (4 か所)、リード線の抵抗 R_L (2 か所)、を考慮した回路を考えることとなる (図 4(a))。

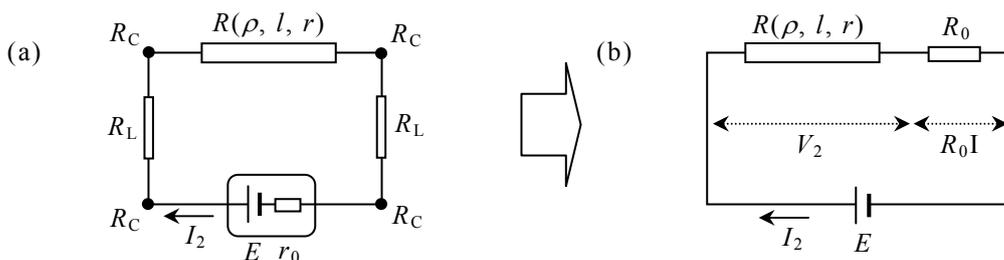


図 4. モデル II (電圧一定モデル (内部抵抗や接触抵抗等を考える)) の回路図。

(a) 図は電熱線の抵抗 R とその他の抵抗 R_0 に分けられ、(b) 図となる

ここで示した抵抗全ては直列につながれており、電熱線の抵抗 R とその他の抵抗 $R_0(=r_0+4R_C+2R_L)$ として

$$E = \{R + (r_0 + 4R_C + 2R_L)\}I_2 = (R + R_0)I_2 = V_2 + R_0I_2 \quad (5)$$

と表される。つまり、電池の起電力 E がそのまま、電熱線にかかる電圧 V_2 とはならない ($V_2 < E$)。

3-2. モデル II で表させる物理量

モデル II の回路における電熱線に関する物理量をモデル I 同様に展開する。モデル I との区別化をするために、図 4(b)を基準に電熱線の半径 r 及び r' の場合 ($r < r'$)、電流を I_2 と I_2' 、電圧を V_2 と V_2' とそれぞれおき、表 2 同様の展開を行ない、その結果を表 3 に示す。ただし、 R_0 は変数と考える。

表 3. モデル II における電熱線に関する物理量。ここで「単位当たりの電力量」は発泡ポリスチレンの単位面積・単位時間当たりの電力量を意味する。

物理量	モデル II (半径 r) (図 4(b))	大小関係	モデル II (半径 r')
抵抗	$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$	$>$	$R' = \rho \frac{l}{S'} = \frac{\rho l}{\pi r'^2}$
電圧	$V_2 = E - R_0 I_2 = \frac{E \rho l}{\rho l + R_0 \pi r^2}$	\geq	$V_2' = E - R_0 I_2' = \frac{E \rho l}{\rho l + R_0 \pi r'^2}$
電流	$I_2 = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E \pi r^2}{\rho l + R_0 \pi r^2}$	$<$	$I_2' = \frac{E}{R' + R_0} = \frac{E \pi r'^2}{\rho l + R_0 \pi r'^2}$
電力	$P_2 = V_2 I_2 = \frac{E^2 \rho l \pi r^2}{(\rho l + R_0 \pi r^2)^2}$	不確定	$P_2' = V_2' I_2' = \frac{E^2 \rho l \pi r'^2}{(\rho l + R_0 \pi r'^2)^2}$
電力量	$W_2 = P_2 t = \frac{E^2 \rho l \pi r^2 t}{(\rho l + R_0 \pi r^2)^2}$	不確定	$W_2' = P_2' t = \frac{E^2 \rho l \pi r'^2 t}{(\rho l + R_0 \pi r'^2)^2}$
単位当たりの電力量	$\Delta W_2 = \frac{1}{2} P_2 t \times \frac{L}{l} = \frac{E^2 \rho r}{2(\rho l + R_0 \pi r^2)^2}$	不確定	$\Delta W_2' = \frac{1}{2} P_2' t \times \frac{L}{l} = \frac{E^2 \rho r'}{2(\rho l + R_0 \pi r'^2)^2}$

ここで注目すべき点は電圧一定モデルと言いつつ、それは電池の起電力 E が同じであり、電熱線にかかる端子電圧は $R_0=0$ の場合を除き、同じではないことである ($V_2 \neq V_2'$)。さらに、電熱線の半径の違う回路における電力、電力量、単位面積・単位時間当たりの電力量それぞれの大小関係がモデル I と異なり、ケースバイケース (不確定) となることである。その原因はここでいうその他の抵抗 R_0 に他ならない。その関係は 6 章にて具体的な数値を用いて詳細に述べることにする。なお、モデル II において $R_0=0$ と置いたのがモデル I であり、これら 2 つは全くの別物ではなく、モデル II の 1 つの解 (特殊解) がモデル I となっている。

最後に、電力量の比と単位面積・単位時間当たりの電力量の比をそれぞれ以下に示す。

$$W'_2 = \frac{r'^2(\rho l + R_0\pi r'^2)^2}{r^2(\rho l + R_0\pi r^2)^2} W_2 \quad (6)$$

$$\Delta W'_2 = \frac{r'(\rho l + R_0\pi r'^2)^2}{r(\rho l + R_0\pi r^2)^2} \Delta W_2 \quad (7)$$

4. モデル III 『小学校理科 電圧一定モデル（並列モデル）』

モデル II の問題点は電池の内部抵抗等の影響により、電熱線にかかる電圧に差が生じたことが原因であった。では、その解決策は**と言うと**、電源装置を用いるか、電熱線を並列につないで実験を行うか**ことが考えられる**。前者は接触抵抗やリード線の抵抗は残るものの電池の内部抵抗の影響がなくなるために実験はうまくいく可能性が高いことが予想される。ただし、きちんと電熱線に同じ電圧がかかっているということを正しく期待するのであれば、後者を採用すべきである。ここでは、後者の並列モデルについて検討を行う。図 5(a)に示すように回路に全体の電流は i に対して、それぞれの電熱線に流れる電流 I_3, I_3' と異なる（分かれる）ことにより電熱線にかかる電圧 V_3 が一定となる回路である ($r < r'$)。なお、図 5(a)では電池の内部抵抗 r_0 しか示していないが、図 4(a)で示したように接触抵抗 R_c やリード線の抵抗 R_L も同等に考慮し、その他の抵抗 $R_0(=r_0+4R_c+2R_L)$ として図 5(b)で示す回路を考える。

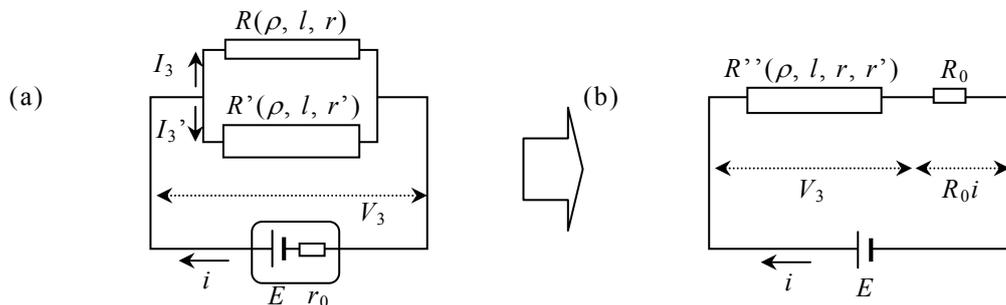


図 5. モデル III(電圧一定モデル（並列モデル）)の回路図。 R'' は R と R' の合成抵抗を意味する。

ここで、電流 i は以下の式で表され、電熱線に関するその他の物理量を表 4 に示す。

$$i = \frac{E\pi(r^2 + r'^2)}{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)} \quad (8)$$

表 4. モデル III における電熱線に関する物理量。ここで「単位当たりの電力量」は発泡ポリスチレンの単位面積・単位時間当たりの電力量を意味する。

物理量	モデル III (半径 r) (図 5(b))	大小関係	モデル III (半径 r')
抵抗	$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$	$>$	$R' = \rho \frac{l}{S'} = \frac{\rho l}{\pi r'^2}$
電圧	$V_3 = RI_3 = \frac{E\rho l}{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)}$	$=$	$V_3 = R'I'_3 = \frac{E\rho l}{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)}$

電流	$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{E\pi r^2}{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)}$	<	$I'_3 = \frac{V_3}{R'} = \frac{E\pi r'^2}{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)}$
電力	$P_3 = V_3 I_3 = \frac{E^2 \rho l \pi r^2}{\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$	<	$P'_3 = V'_3 I'_3 = \frac{E^2 \rho l \pi r'^2}{\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$
電力量	$W_3 = P_3 t = \frac{E^2 \rho l \pi r^2 t}{\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$	<	$W'_3 = P'_3 t = \frac{E^2 \rho l \pi r'^2 t}{\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$
単位当 たりの 電力量	$\Delta W_3 = \frac{E^2 \rho r}{2\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$	<	$\Delta W'_3 = \frac{E^2 \rho r'}{2\{\rho l + R_0\pi(r^2 + r'^2)\}^2}$

モデル I 同様に電熱線にかかる端子電圧 V_3 が同じになり、電力量の比と単位面積・単位時間当たりの電力量の比はそれぞれ、

$$W'_3 = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 W_3 \quad (9)$$

$$\Delta W'_3 = \left(\frac{r'}{r}\right) \Delta W_3 \quad (10)$$

と表される。これらの値はモデル I の場合と同じであり、『電圧一定の回路において電熱線が太い方が発熱量が多い』という条件を満たすものである。では、モデル I とモデル III を同等に考えていいか？という問いにはいささか疑問が残る。表 2 と表 4 で示された物理量の式が異なっている。簡単に考えると電流、電力、電力量、単位当たりの電力量において分母の項の影響で値が小さくなっていることである。つまり、『電圧一定の回路において電熱線が太い方が発熱量が多い』という事実は保たれようと実験において発泡ポリスチレン片を溶かせないと元もこうもない。その点に注意は必要である。

5. モデル IV 『中学校理科 電流一定モデル（接触抵抗等を考える）』

従来、中学校理科においては乾電池ではなく、電源装置を用いている。特に電流一定回路において乾電池は原理的に使用不可能である。そのため、触抵抗やリード線の抵抗のみを考慮したモデルを考える（図 6）。ここではこれらの合成抵抗 $R_0' (=4R_c + 2R_L)$ として、図 6(a) 及び (b) に相当するモデルを考える ($r < r'$)。

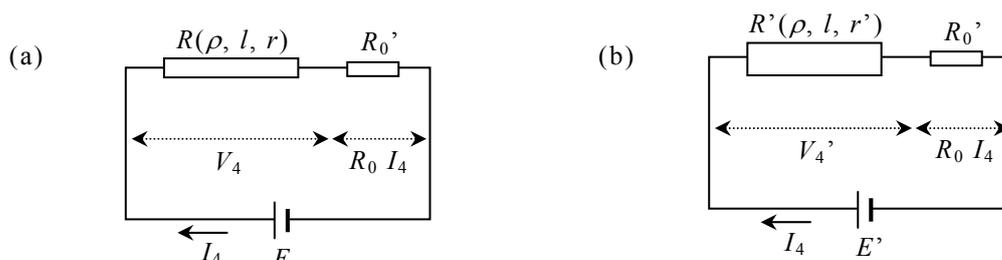


図 6. モデル IV(電流一定モデル（接触抵抗等を考える）)の回路図

表 5. モデル IV における電熱線に関する物理量。ここで「単位当たりの電力量」は発泡ポリスチレンの単位面積・単位時間当たりの電力量を意味する。

物理量	モデル V(半径 r) (図 6(a))	大小関係	モデル V(半径 r') (図 6(b))
抵抗	$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$	$>$	$R' = \rho \frac{l}{S'} = \frac{\rho l}{\pi r'^2}$
電圧	$V_4 = E - R_0 I_4 = \frac{\rho l I_4}{\pi r^2}$	$>$	$V'_4 = E' - R'_0 I_4 = \frac{\rho l I_4}{\pi r'^2}$
電流	$I_4 = \frac{V_4}{R}$	$=$	$I_4 = \frac{V'_4}{R'}$
電力	$P_4 = V_4 I_4 = \frac{\rho l I_4^2}{\pi r^2}$	$>$	$P'_4 = V'_4 I_4 = \frac{\rho l I_4^2}{\pi r'^2}$
電力量	$W_4 = P_4 t = \frac{\rho l I_4^2 t}{\pi r^2}$	$>$	$W'_4 = P'_4 t = \frac{\rho l I_4^2 t}{\pi r'^2}$
単位当たりの電力量	$\Delta W_4 = \frac{1}{2} P_4 t \times \frac{L}{l} = \frac{\rho I_4^2}{2\pi^2 r^3}$	$>$	$\Delta W'_4 = \frac{1}{2} P'_4 t \times \frac{L}{l} = \frac{\rho I_4^2}{2\pi^2 r'^3}$

求められた物理量は、定義として用いられた電流一定 I_4 以外は全て電熱線の細い回路において大きな値を示し、電力量の比と単位面積・単位時間当たりの電力量の比はそれぞれ、

$$W'_4 = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 W_4 \quad (11)$$

$$\Delta W'_4 = \left(\frac{r}{r'}\right)^3 \Delta W_4 \quad (12)$$

という関係式を得る。この(11)、(12)式が『電流一定の場合、電熱線が細い方が発熱量が大きい』という証明となる。なお、表 5 の中には重要なもう一つの事実が隠れている。それはそれぞれの物理量にその他の抵抗 R_0 が含まれていないことである。これはモデル IV がモデル II のようにケースバイケースで電力等の大小関係の反転が行わないことを意味し、さらに本章の標題としては「接触抵抗等を考える」という表現を用いたが、実は考えようがなかるうが、結果には影響しなかったのである。

6. モデル I-IV の図による比較

2 章から 5 章ではさまざまなケースにおける電熱線の太さが異なる場合の発熱量（電力量）の対比を数式を用いて比較を行った。これらの結果から例えば、表 1 の東京書籍の提案実験において、電池の場合は 50 mm だが、電源装置の場合 80 mm を用いるのは前者は電池の内部抵抗 r_0 を考慮しないととけないことから、電熱線にかかる電圧を上げるためにも（結果的には電力量を下げないためにも）電熱線を短くしたという理由であることがすぐにわかる。このよ

うに数式からわかることは多くある。そこで、本章では視覚的な理解を促進するために、数値計算結果を用いた比較検討を行う。具体的には電圧一定モデル（モデル I, II, III）では表 1 に示された東京書籍の具体的な値を採用する(表 6)。

表 6. 数値計算のために採用した具体的な値

抵抗率 ρ	$108 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$
長さ l	50 mm
半径 r	0.1 mm (直径 0.2 mm)
半径 r'	0.15 mm (直径 0.3 mm)
起電力 E, V_1	1.5 V (乾電池 1 個)

そして、溶かす発泡ポリスチレンの厚さ L は 5 mm と仮定し、変数はその他の抵抗 R_0 ((5)式)を採用して、数式計算を行った（ただし、2章で述べたように厚さ L は計算において必要が無い）。ここで、 R_0 は現実的にありうる値として 0 から 1 Ω を採用し、求めた結果を図 7 に示す。ここで注目して欲しいのは図 7(d)及び 7(e)である。発泡ポリスチレンに対して単位面積・単位時間あたりの電力量は理想モデル（モデル I またはモデル II の $R_0=0$ ）では電熱線の太い方が大きな値を持つが、 $R_0 \sim 0.4 \Omega$ を境にその値は逆転している。このことからその他の抵抗 R_0 （電池の内部抵抗、接触抵抗、リード線の抵抗）を考慮すると、電熱線の発熱量自体は太い方が多いが（7(c)図参照。ただし、本文では電力と時間の積で表される $W_2(=P_2t)$ と $W_2'(=P_2't)$ の比較を意味する）、単位当たりの熱量（ ΔW_2 及び $\Delta W_2'$ ）はその大小関係が逆転していることから、時として細い電熱線の場合に発泡ポリスチレンが早く溶けるという結果を得たのである。結果的に発熱量（電力量）ではなく、単位当たりの発熱量を考えないといけないのである。ちなみに電力においても図 7(c)からは読み取れないが、 $R_0 \sim 1.15 \Omega$ を境に電力 P_2 と P_2' の大小関係が逆転をしている。これら逆転現象の解決方法として考えられたのがモデル III であり、この場合、電熱線全体の発熱量も単位当たりの発熱量も太い場合の方が大きいという結果を得ることができる。しかし全ての物理量に置いて、抵抗 R_0 による減衰（表 4. R_0 の項により分母が大きくなる）が大きくなっており、時として発泡ポリスチレンを溶かし切るだけの熱量を得ることが出来ない可能性が生じる可能性があり、注意が必要である（同一の電熱線に対して、それぞれ $\Delta W_1 \geq \Delta W_2(R_0) > \Delta W_3(R_0)$ または $\Delta W_1' \geq \Delta W_2'(R_0) > \Delta W_3'(R_0)$ という関係を持つ）。

次に、電流一定のモデル IV について考える。ここでは電流 $I_4=1 \text{ A}$ と仮定し、他の値は表 6 の値を採用し、計算を行った結果を図 8 に示す。このモデルではそれぞれの抵抗にかかる電圧が一定となり、結果的にその他の抵抗 R_0' （接触抵抗、リード線の抵抗）を考慮せずに、発熱量の値が一定となり、再現性良く「電流一定の場合は発熱線が細い方が発熱量が多い」という結果を得ることが出来る。ただし、この場合は、単位当たりの電力量は半径の比の 3 乗で変わるにより ((12)式)、太さの設定に気を配らないと発泡ポリスチレンを溶かせないということも想定されるので注意が必要である。

以上、2～6 章において数式を用いて系統的かつ定量的に議論を行った。ただし、示した結果からモデル II の実験はうまくいかないものだと決めつけないで欲しい。新しい乾電池を用いる、配線の接触をきちんと行う、リード線を短くする等の配慮により、解決する可能性は十分にある。小中学校理科における実験の成功は指導者側の正しい理解と事前準備に大きく左右されることを忘れないで欲しい。

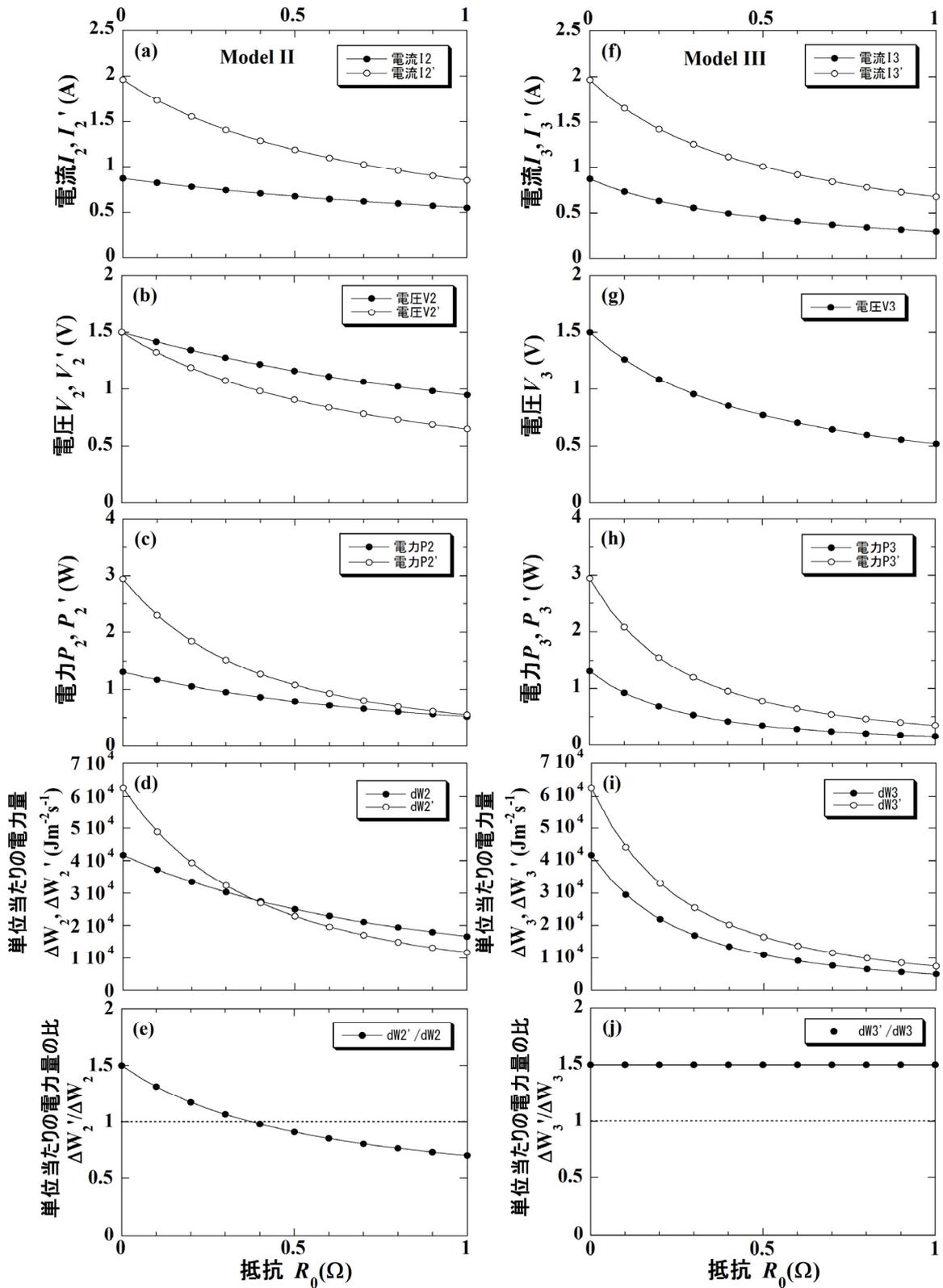


図 7. モデル II ((a)~(e)) とモデル III ((f)~(j)) における計算により求めた物理量。なお、モデル II において $R_0=0$ での値がモデル I での物理量を表す。また、(g) においては、電熱線の太さが異なっても同じ電圧 V_3 の値をとることを意味している。なお、本来、物理量の変化は連続曲線ではあるが、指標のために 0.1Ω ごとにマーク表示をしている。

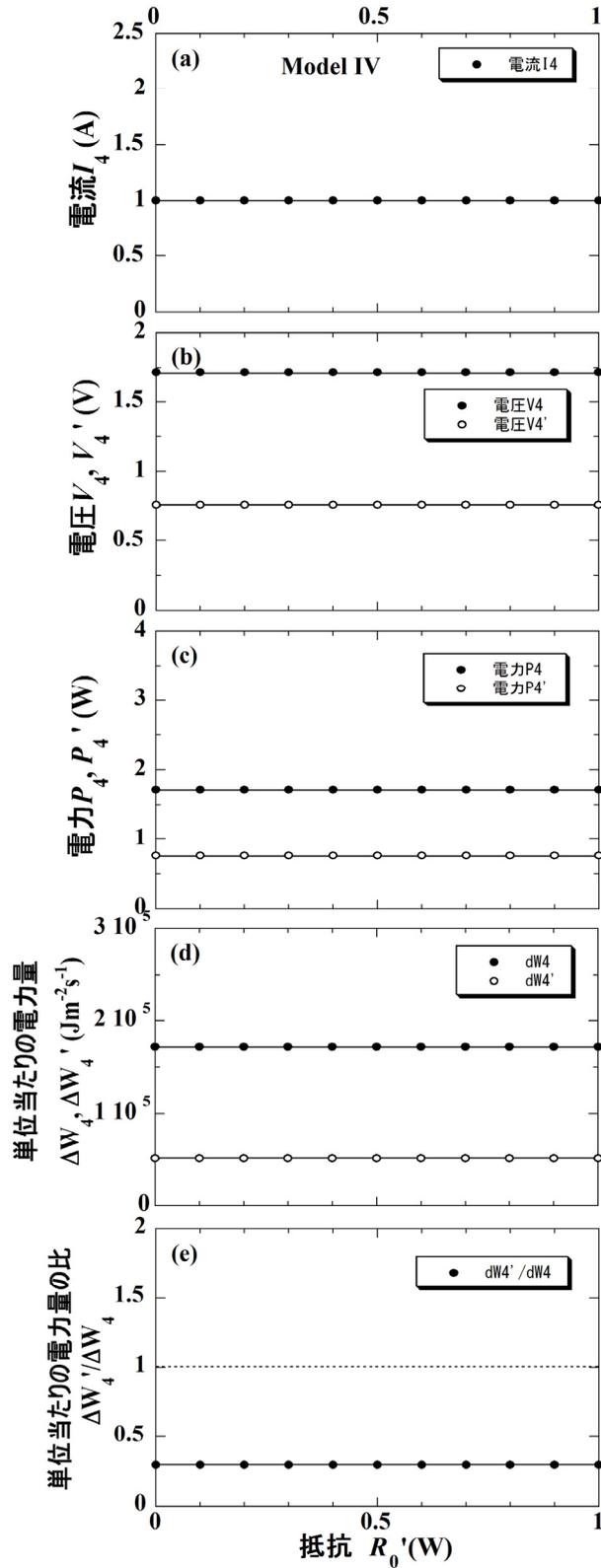


図 8. モデル IV ((a)~(e)) における計算により求めた物理量。また、(a)においては、電熱線の太さが異なっても同じ電流 I_4 の値をとることを意味している。なお、本来、物理量の変化は連続曲線ではあるが、指標のために 0.1Ω ごとにマーク表示をしている。単位当たりの電気量 (d) 以外の縦軸のスケールは図 7 のそれぞれ対応するものと一致させている。

おわりに

本論文は「電気による発熱」に関する物理量の相関を系統的かつ定量的にまとめたものである。従来は個々の小単位において定性的に理解していたことが、高校物理の範囲内で定量的に表現され、校種をまたがって系統的に議論できたことに本論文の意義を感じる。小・中学校理科の教員または教員を目指す大学生にとって理科の中でも物理は理解しにくい分野と言われている。しかし、それは個々のつながりを考えず、定性的に個別な事象としてとらえていることが主な原因と考える。物理は身の回りに起こった事象を容易かつ定量的に関係付けることが可能な手法（学問）である。山口大学教育学部理科教育講座物理学研究室（代表：重松）においては、近年、小中学校理科で学ぶさまざまなテーマに対して一步踏み込んだ知識を提示することを目的に、定性的な実験・学習内容の定量化を行ってきた⁶⁾。これらは物理という学問を表面上だけの理解ではなくその本質を理解して欲しい、さらに学習時の着眼点を探す能力向上のために行っている。ぜひ、活用していただけると幸いである。なお、本論文で示した内容は数式的な解釈・証明であり、実測における検証及び相違の有無に関する考察を示すことが出来なかったことが残念である。それに関しては近い将来、別紙にて発表したい。

謝辞

本研究は山口エネルギー環境教育研究会の「エネルギー環境教育ネットワークを活用した人材育成と教育普及」プロジェクトの一環で行なった教育活動の成果報告の一部である。この教育活動に協力頂いた山口大学教育学部の棟居翼氏、内田由美子氏、前川真利奈氏に感謝申し上げます。さらに、本論文で述べた活動の一部は（財）山口大学教育研究後援財団及び（財）日本教育公務員弘済会からの研究・事業助成により活動を行った。ここに感謝申し上げます。

引用文献

- 1) 文部科学省（2008）：「学習指導要領解説 理科編(平成 20 年 8 月)」 大日本図書株式会社.
- 2) 鎌田正裕・隈元就仁（2010）：「小学校第 6 学年における電熱線の発熱実験についての考察」 東京学芸大学紀要 自然科学系 62, 9-13.
- 3) 野呂茂樹（2010）：「6 年「電流による発熱」－出前講義の記録－」理科教室 2 月号, 44-47.
- 4) 上田哲也・川上紳一：「小学校理科「電熱線による発熱」におけるサーモグラフィーの活用と実験方法の検討」 岐阜大学教育学部研究報告（自然科学） 34, 53-56.
- 5) 国立天文台編：「理科年表 平成 23 年度」丸善株式会社.
- 6) 例えば、内田由美子・吉岡真志・重松宏武（2011）：「銅線の電気抵抗の温度変化－中学校理科における発展学習に向けた定量的考察－」山口大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要 32, 17-26.
佐々木英樹・重松宏武（2011）：「エネルギー変換の定量的理解に関する研究－中学校理科におけるコンデンサーを用いた授業のデザイン－」山口大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要 31, 59-70.